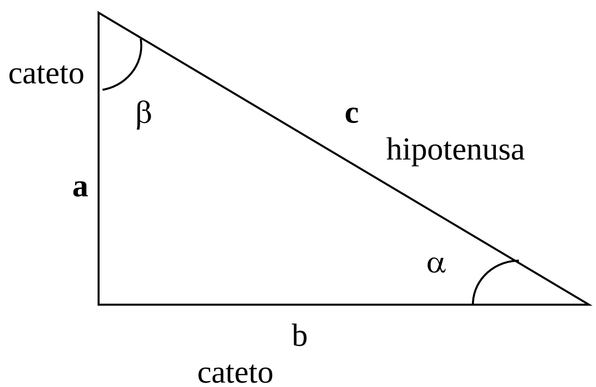
GUÍA PARA EXAMEN DE PRIMERA Y SEGUNDA VUELTA MATEMÁTICAS V

UNIDAD I

TRIÁNGULO RECTÁNGULO Y TEOREMA DE PITÁGORAS

Un triángulo rectángulo consta de dos lados llamados catetos y un lado más largo llamado hipotenusa. El ángulo existente entre los catetos es el ángulo recto.



El teorema de Pitágoras aplica en triángulos rectángulos y dice "la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".

$$ca^2 + co^2 = h^2$$

Para definir:

- Cateto opuesto al ángulo.- es el que se encuentra enfrente del mismo.
- Cateto adyacente al ángulo.- es el que está formando el ángulo.
- Hipotenusa.- es el lado opuesto al ángulo recto.

Las relaciones existentes entre los catetos de un triángulo rectángulo se pueden determinar por las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente.

Seno (sen α).- cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.
Coseno (cos α).- cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.
Tangente (tan α).- cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.
Cosecante (csc α).- función inversa del seno del ángulo.
Secante (sec α).- función inversa del coseno del ángulo.
Cotangente (ctg α).- función inversa a la tangente del ángulo.

Para que un triángulo quede resuelto se deberán conocer los tres lados y los tres ángulos.

Se debe tener en consideración que todo triángulo cumple con:

1.- La suma de sus ángulos internos siempre será de 180 °.

2.- La suma de sus ángulos externos siempre será de 360 °.

3.- Un ángulo externo al triángulo siempre será igual a la suma de los dos ángulos internos que son adyacentes a él.

4.- Un ángulo interno y su ángulo externo son suplementarios, esto es, que la suma de ambos es igual a 180 °.

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Cuando un triángulo no es rectángulo se dice que es oblicuángulo. Para poder resolverlo se deberán conocer tres de sus elementos teniendo que ser uno forzosamente un lado.

LEY DE SENOS

La ley de senos se utiliza cuando se conocen:

a) Un lado y dos ángulos
b) Dos lados y el ángulo opuesto a cualquiera de ellos.

LEY DE COSENOS

La ley de cosenos se utiliza cuando se conocen:

a) Los tres lados
b) Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} \equiv \boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta} \equiv \boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\delta}$$

Como se puede observar la ley de cosenos parte del teorema de Pitágoras. En este caso se puede despejar el ángulo conociendo los tres lados por medio de la función inversa.

Resuelve los siguientes triángulos oblicuángulos

1. $\alpha = 41°$, $\gamma = 77°$, a = 10.5
2. $\beta = 20°$, $\gamma = 31°$, b = 210
3. $\alpha = 60°$, b = 20, c = 30
4. $\gamma = 45°$, b = 10, a = 15

5. $\beta = 150°$, a = 150, c = 30
6. a = 25, b = 80, c = 60
7. $\gamma = 81°$, c = 11, b = 10
8. a = 20, b = 20, c = 10
9. a = 10, b =15, c = 12
10. a = 2, b = 3, c = 4

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una identidad trigonométrica es una igualdad de funciones trigonométricas más sencillas que facilitan su manejo. El proceso para el manejo de las identidades trigonométricas, generalmente es algebraico. Dichas identidades se dividen de acuerdo a su función:

1.- IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\csc\alpha = \frac{1}{sen\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$$

2.- IDENTIDADES PITAGÓRICAS

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \qquad 1 + ctg^2\alpha = \csc^2\alpha$$

Verifica las siguientes identidades trigonométricas

1.- $\cos\theta \sec\theta = 1$

2.- $\tan\alpha \cot\alpha = 1$

3.- $sen\lambda \sec\lambda = \tan\lambda$

4.- $sen\beta \cot\beta = \cos\beta$

5.- $\frac{\csc\varphi}{\sec\varphi} = \cot\varphi$

6.- $\cot\omega \sec\omega = \csc\omega$

7.- $(1+\cos\beta)(1-\cos\beta) = sen^2\beta$

8.- $\cos^2\gamma(\sec^2\gamma - 1) = sen^2\gamma$

9.- $\cos^2\beta - sen^2\beta = 2\cos^2\beta - 1$

10.- $(\tan\alpha + \cot\alpha)\tan\alpha = \sec^2\alpha$

11.- $\frac{sen\delta}{\csc\delta}+\frac{\cos\delta}{\sec\delta}=1$

12.- $1-2sen^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

13.- $(1+sen\lambda)(1-sen\alpha)=\frac{1}{\sec^2\alpha}$

14.- $(1-sen^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)=1$

15.- $\sec\beta-\cos\beta=\tan\beta sen\beta$

UNIDAD II

DEFINICIÓN DEL LUGAR GEOMÉTRICO RECTA

Una recta es el lugar geométrico de los puntos que tienen entre sí la misma pendiente. Esto es, están dirigidos con la misma inclinación. La pendiente esta dada mediante la ecuación:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Tome en cuenta que una recta horizontal tendrá pendiente igual a 0 y una recta recta vertical tiene pendiente ∞

Una recta intersecta en los puntos (a, 0) y (0, b), donde a es la abscisa al origen y b es la ordenada al origen.

FORMAS DE LAS ECUACIONES DE UNA RECTA

1- ECUACIÓN GENERAL.-

$$Ax + By + C = 0$$

2.- ECUACIÓN ORDINARIA:

$$y = mx + b$$

donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen.

Para encontrar la pendiente y las intersecciones de los ejes se podrán utilizar las siguientes fórmulas:

$$m = -\frac{A}{B} \qquad a = -\frac{C}{A} \qquad b = -\frac{C}{B}$$

3.- ECUACIÓN SIMÉTRICA:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{donde a y b} \neq 0$$

FORMAS PARA DETERMINAR LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

1.- Ecuación punto – punto:

Cuando una recta pasa por dos puntos dados cualquiera que estos sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, se aplica la ecuación:

$$(y - y_1) = \frac{(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

2.- Ecuación punto – pendiente:

Cuando se conoce un punto $P_1(x_1, y_1)$ que se encuentra en la recta y su pendiente (m), se aplica la ecuación:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

Determine las ecuaciones ordinarias, generales y simétricas de las rectas que pasan por los dos puntos dados:

1. A(-1, 2) B(7, 2)
2. A(3, 4) B(4, 5)
3. A(7, 1) B(3, 3)
4. A(1/2, 4) B(2, -1)
5. A(2, 3) B(-3, 3)
6. A(-1, 1) B(-1, 5)
7. A(2, -2) B(-3, -4)
8. A(-1, 3) B(5, 2)
9. A(4, -5) B(-2, -4)
10. A(3, -1) B(-2, -6)

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DADOS:

La distancia d entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por la fórmula:

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

PUNTO MEDIO

El punto medio es el punto que se encuentra exactamente a la mitad de un segmento, esto es, que la razón que tiene respecto a 2 puntos del segmento es igual a 1. Para determinar las coordenadas del punto medio del segmento se utiliza la siguiente fórmula:

$$\text{Pm} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Dados los siguientes triángulos

1.- A(-2, -3)	B(5, 1)	C(0, 4)
2.- A(6, 2)	B(4, 7)	C(1, 1)
3.- A(-1, 0)	B(5, 1)	C(1, 2)
4.- A(2, 3)	B(4, 7)	C(8, 5)
5.- A(1, 2)	B(5, 3)	C(3, 9)
6.- A(-3, 2)	B(3, 4)	C(5, -4)
7.- A(2, 1)	B(6, 7)	C(8, 3)
8.- A(-2, 1)	B(4, 7)	C(6, -3)
9.- A(-1, 7)	B(-3, -1)	C(5, -3)
10.- A(-2, 2)	B(3, 5)	C(5, 1)

determine:

- Perímetro del triángulo
- Puntos medios de cada lado
- Tipo de triángulo

UNIDAD III

DOMINIO

Se le llama dominio a los valores que puede tomar *x* dentro de la función. Para realizarlo, se deberá despejar *y* de la ecuación y verificar los valores de *x* que cumplen o satisfacen la ecuación; se deben tener en cuenta las dos restricciones que puede tener la función:

1.- **No** se puede tener raíz cuadrada de números negativos, ya que no son valores reales.
Para este caso, se deberán sacar los términos internos a la raíz cuadrada y se le asigna ≥ 0 debido que serían únicamente los números reales positivos los que se tomarán en cuenta para la función.

2.- **N**o se puede tener división entre cero, debido a que no está definida.

Para este caso, se realiza lo mismo que en el caso anterior pero además se restringe el valor que hace cero al denominador.

RANGO

Se le llama rango o imagen a los valores que puede tomar *y* dentro de la función. Para realizarlo, se deberá despejar *x* de la ecuación y verificar los valores de *y* que cumplen con la función. Para el rango también se toman en cuenta las dos restricciones anteriores.

FUNCIÓN INVERSA

Si f es una función que tiene por dominio al conjunto A y por rango al conjunto B, entonces se llama la función inversa de f, aquella que tiene por dominio el conjunto B y por rango al conjunto A. A la función inversa de f se le denota por f^{-1}

Dada una función $f(x)$, su inversa es otra función, designada por $f^{-1}(x)$ de forma que se verifica que:

Si $f(a)=b$, entonces $f^{-1}(b)=a$

Método para hallar la inversa de una función:

Aunque existen varios métodos para hallar la inversa, los siguientes pasos ayudan a obtener la inversa de la función f (x).

Procedimiento:

1. Se sustituye $f(x)$ por y en la función dada.
2. Se intercambian x y y para obtener $x = f(y)$.
3. Se despeja la nueva variable y.
4. En la solución se escribe $f^{-1}(x)$ en vez de y.

Determine el dominio y el rango por medio de la función inversa de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{x-2}{x}$
2. $f(x) = \frac{x-4}{x+4}$
3. $f(x) = \sqrt{6x+12}$
4. $f(x) = \sqrt{x-5}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{4x-8}$
6. $f(x) = \sqrt{x-3}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{8x-16}$

CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

Las funciones se pueden clasificar de acuerdo a las siguientes características:

1.- Tipo de operaciones:

a) **algebráicas**.- son las funciones donde únicamente aparecen operaciones de sumas, restas, multiplicaciones, cocientes, potencias y radicales.
b) **trascendentes.-** son las funciones donde aparecen expresiones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas

2.- Tipo de ecuación:

a) **explícitas**.- donde la variable dependiente se encuentra despejada
b) **implícitas**.- donde la variable dependiente y la variable independiente se encuentran como una igualdad sin despejar.

3.- Por su representación gráfica:

a) **continua**.- si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo, es decir, si no presenta puntos de discontinuidad.
b) **discontinua**.- si tiene dos o más intervalos de dominio, representando esto puntos de discontinuidad.

4.- Según su simetría:

a) **par**.- una función es par cuando al sustituir cualquier valor de (x) dentro de la función, producirá exactamente el mismo valor de rango que si sustituyéramos el valor de (-x).
b) **impar**.- una función es impar cuando al sustituir cualquier valor de (x) dentro de la función, no producirá el mismo valor de rango que si sustituyéramos el valor de (-x).

5.- Según su crecimiento:

a) **creciente**.- si para cualquier par de números x_1, x_2 del intervalo $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
b) **Decreciente**.- si para cualquier par de números x_1, x_2 del intervalo, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

6.- **Función inyectiva**, también llamada unívoca o uno a uno. Es cuando a cada elemento del cotradominio le corresponde un sólo elemento del dominio, agotando todos los elementos del dominio y sin importar sobren elementos del contradominio.

Las condiciones que caracterizan a una función inyectiva son:

a) Dados dos elementos del conjunto original, si estos elementos son distintos, sus imágenes también lo serán.
b) Todo elemento perteneciente al conjunto imagen de la aplicación es imagen de un solo elemento del conjunto original.

Función suprayectiva o sobreyectiva es cuando el contradominio es igual al rango.

La condición que le caracteriza a una función suprayectiva es que la imagen de la función sea igual a su contradominio.

Función Biyectiva o biunívoca, cuando todo elemento del contradominio es imagen de uno y solamente un elemento del dominio, esto en otras palabras sucede cuando la función es inyectiva y suprayectiva a la vez.

Las condiciones que caracterizan a una función biyectiva son:

a) Ningún elemento pertenece al conjunto imagen de la aplicación es imagen de más de un elemento del conjunto dominio.
b) No debe de sobrar elementos ni en el dominio ni en el contradominio.

ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

En una ecuación pueden aparecer las variables de diferente forma, por ejemplo, en suma, división, con logaritmo o exponencial. Para poder despejar cualquier variable de una ecuación logarítmica o exponencial, será necesario jugar con las propiedades de ambas para su resolución.

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas y exponenciales

1.- $4^{2x-1}=3^{x-2}$ R= -0.4844

2.- $7^{x^2-2x+1}=9^{2x-3}$ R= x_1=2.5110, x_2= 1.7472

3.- $2^{6x+4}=7^{x^2-3}$ R= x_1= 3.4280, x_2= -1.2907

4.- $2^{3x+1}=3^{4-2x}$ R= 0.8654

5.- $e^{x-4}=9^{6x}$ R= -0.3283

6.- $7^{x-4} = e^{5x-1}$ R= -2.2211

7.- $\log_2(x+1) - 4 = \log_2(3x-5)$ R= 81/47

8.- $\log_4(x^2-1) - \log_4(x+1) = 2$ R= 17

10.- $\log_2(4-x) - 5 = \log_2(3x-1)$ R= 36/97

11.- $\ln(x-2) + 4 = \ln(6x-1)$ R=2.2263

UNIDAD IV

La **media aritmética** o promedio representa el reparto equitativo, el equilibrio, la equidad. Es el valor que tendrían los datos, si todos ellos fueran iguales. O, también, el valor que correspondería a cada uno de los datos de la distribución si su suma total se repartiera por igual.

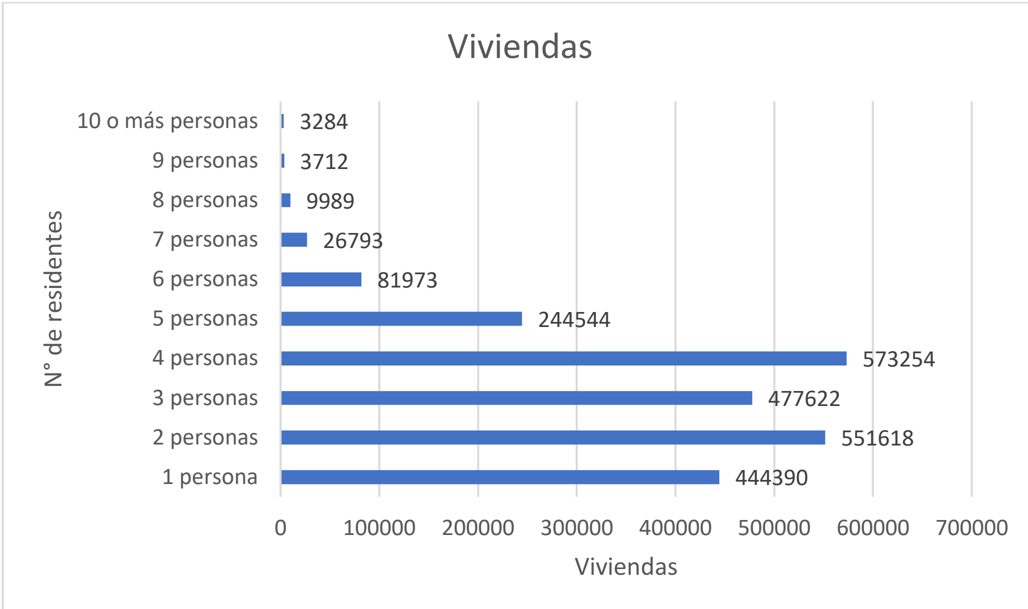
Si se ordenan todos los datos, de menor a mayor, la **mediana** es el valor que ocupa la posición central. Si el número de datos es par, la mediana es la media aritmética de los dos centrales.

La **moda** es el valor que más se repite o, lo que es lo mismo, el que tiene la mayor frecuencia.

De los siguientes grupos de datos, determina la media, mediana y moda.

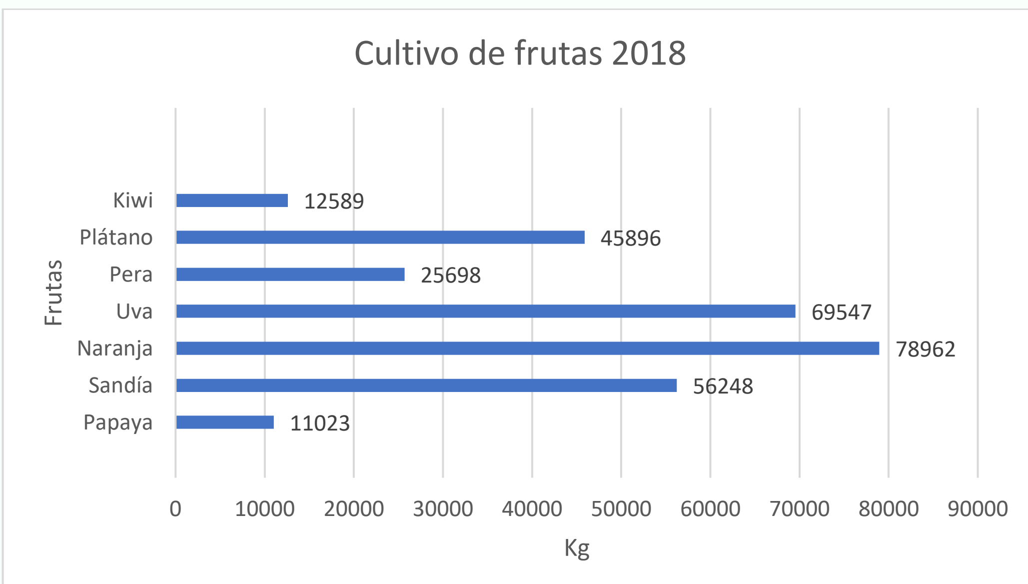
a) 2, 5, 5, 6, 8, 8, 9, 11
b) 3, 10, 36, 255, 79, 24, 5, 8
c) 2, 3, 5, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 12
d) Las alturas (en centímetros) de los 10 alumnos de una clase son 178, 163, 155, 159, 171, 155, 172, 170, 159 y 163.

De acuerdo a las siguientes gráficas, responde las preguntas



¿Cuál es el número de viviendas totales?

¿Cuál es el promedio de residentes en las viviendas?



¿Cuál fue el total de cultivos durante el año?

¿Cuál fue el promedio de los cultivos?

UNIDAD V

FORMAS DE LA ECUACION DE UNA CIRCUNFERENCIA

1.- FORMA CANONICA:

Cuando una circunferencia tiene su centro en el origen, se habla de una ecuación canónica, esto es Q(0, 0). Siendo la ecuación de la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

2.- FORMA ORDINARIA:

Esta forma se presenta cuando el centro de la circunferencia se encuentra fuera del origen en cualquier otra coordenada Q(h, k), y la ecuación se modifica de la forma:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

3.- FORMA GENERAL:

La forma general de la ecuación de una circunferencia es igual que en todas las cónicas:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde como ya se vió, los coeficientes de A y B tienen que ser iguales.

Encuentre las ecuaciones de las circunferencias con los siguientes elementos:

1.- Q(1,3)	r =5	2.- Q(0,0)	r =1
3.- Q(5, -2)	r = 2	4.- Q(0,3)	r = ½
5.- Q(3,-5)	r = 2	6.- Q(4,1)	r = 3

Encuentre la ecuación ordinaria, centro y radio de las siguientes circunferencias:

1. $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$
3. $4x^2 + 4y^2 - 4x - 12y + 1 = 0$
4. $3x^2 + 3y^2 - 24x + 18y + 48 = 0$
5. $2x^2 + 2y^2 + 2x + 10y - 19 = 0$
6. $9x^2 + 9y^2 - 12x - 24y - 13 = 0$
7. $5x^2 + 5y^2 - 8x - 4y - 121 = 0$
8. $9x^2 + 9y^2 - 18x - 12y - 23 = 0$

FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA

1.- FORMA CANÓNICA

Se denomina forma canónica ya que tiene vértice en el origen.

a) Parábola horizontal

$$y^2 = 4px$$

b) Parábola vertical

$$x^2 = 4py$$

2.- FORMA ORDINARIA

Es una parábola con vértice fuera del origen, es decir. tiene coordenadas (h, k).

a) Parábola horizontal

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

b) Parábola vertical

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

3.- FORMA GENERAL:

Se utiliza la misma ecuación de cualquier cónica:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En este caso, A o B resultan ser cero. Una parábola queda resuelta cuando se conocen todos sus elementos.

La recta por donde pasan el vértice, foco y punto de intersección se llama eje focal. La distancia que existe entre el vértice y el foco se llama parámetro, el cual puede ser positivo si la parábola abre a la derecha o hacia arriba, o negativo, si la parábola abre hacia la izquierda o hacia abajo. La recta que es perpendicular al eje focal, se le llama directriz, y tiene la misma distancia al vértice que el parámetro. El punto del eje focal que intersecta con la directriz se llama punto de intersección.

La distancia comprendida entre las dos aperturas se le denomina lado recto y equivale a $|4p|$. Es importante el signo del parámetro ya que como se dijo, es el que indica hacia donde abre la parábola.

Encuentra los elementos de las siguientes parábolas a partir de elementos

1. V(0, 0)	F(3, 0)
2. V(0, 0)	D: x=3
3. V(2, 3)	F(2, 5)
4. V(-3, -1)	F(-3, 1)
5. V(3, 1)	D: y=3
6. a(-2, 2)	F(6, 2)
7. F(3, 1)	a(11, 1)

Encuentra los elementos de las siguientes parábolas a partir de ecuación

1. $x^2 - 12x + 4y + 12 = 0$
2. $y^2 - 4x - 12y + 12 = 0$
3. $y^2 + 8x - 32 = 0$
4. $x^2 + 2x - 2y - 5 = 0$
5. $x^2 - 6y - 12 = 0$
6. $2x^2 - 8x - 8y - 32 = 0$
7. $y^2 - 12x - 2y - 23 = 0$
8. $y^2 - 8x - 2y + 9 = 0$
9. $x^2 - 4x + 12y + 52 = 0$
10. $x^2 - 6x - 8y + 1 = 0$